

Σενάριο

Το Ορισμένο Ολοκλήρωμα (Εμβαδόν Παραβολικού Χωρίου – Η Έννοια του Ορισμένου Ολοκληρώματος – Ιδιότητες και Θεωρήματα Ορισμένου Ολοκληρώματος)

Εκπαιδευτικός: Στέφανος Μακαριάδης ΠΕ 03

Γνωστική περιοχή: Μαθηματικά Γ' Λυκείου – Β' Μέρος (Ανάλυση) § 3.4

Θέμα:

Το προτεινόμενο σενάριο απευθύνεται σε μαθητές της Γ' Λυκείου και αναφέρεται στο Β' Μέρος (Ανάλυση) και στην παράγραφο 3.4 «Το Ορισμένο Ολοκλήρωμα».

Οι μαθητές εμπλέκονται με δραστηριότητες που αφορούν τον υπολογισμό του παραβολικού χωρίου, την έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος, τις ιδιότητες με βάση τον ορισμό του ορισμένου ολοκληρώματος και τα θεωρήματα που ισχύουν στο ορισμένο ολοκλήρωμα. Η έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος, είναι από τις πιο απαιτητικές ενότητες στη διδασκαλία του μαθήματος των Μαθηματικών στην Γ Λυκείου. Εισάγεται στο σχολικό εγχειρίδιο ως το εμβαδόν παραβολικού χωρίου με τον υπολογισμό των αντίστοιχων αθροισμάτων (κάτω, πάνω και ενδιάμεσα) των ορθογωνίων που δημιουργούνται στο παραβολικό χωρίο.

Η κατανόηση των εννοιών απαιτούν σύνθετες νοητικές λειτουργίες και απαιτούνται πολλές αναπαραστάσεις εννοιών και πρέπει να ενισχυθούν με πρόσθετα εργαλεία διδασκαλίας και τον σωστό καθοδηγητικό ρόλο του διδάσκοντα.

Τεχνολογικά εργαλεία:

Το σενάριο προτείνεται να διεξαχθεί στο εργαστήριο πληροφορικής με τη χρήση του λογισμικού Geogebra.

Σκεπτικό:

Βασική ιδέα:

Οι μαθητές με τη βοήθεια της ψηφιακής τεχνολογίας θα διερευνήσουν και θα ανακαλύψουν την έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος σε συνδυασμό με τον υπολογισμό του παραβολικού χωρίου με τη μέθοδο της εξαντλήσεως. Ποιο συγκεκριμένα αξιοποιώντας τη δυνατότητα του λογισμικού Geogebra και με τη δυνατότητα δυναμικής προσέγγισης, οι μαθητές θα προσπαθήσουν να ανακαλύψουν και να διερευνήσουν τον τρόπο με τον οποίο το εμβαδόν ενός χωρίου εκφράζεται με το ορισμένο ολοκλήρωμα. Έτσι οι μαθητές θα ανακαλύψουν μία νέα έννοια βασισμένοι όμως σε γνωστές έννοιες εμβαδών ορθογωνίων και ορίων στο $+\infty$ με το κριτήριο παρεμβολής που έχουν διδαχθεί στην παράγραφο 1.5. Οι κινήσεις αυτές είναι δυνατόν να οπτικοποιηθούν και να γίνουν δυναμικές αν η διδασκαλία υποστηριχτεί στο λογισμικό Geogebra με υποστηρικτικά φύλλα εργασίας που βήμα - βήμα θα βοηθήσουν τους μαθητές να ανακαλύψουν τη γνώση.

Προστιθέμενη αξία:

Το προτεινόμενο εκπαιδευτικό σενάριο φιλοδοξεί να συμβάλει στην αλλαγή - βελτίωση της στάσης των μαθητών απέναντι στα Μαθηματικά και στη διαδικασία προσέγγισής τους.

Οι μαθητές αναμένεται να συνειδητοποιήσουν ότι τα Μαθηματικά μπορούν να αποτελέσουν αντικείμενο διερεύνησης και μάλιστα κάθε μαθητής μπορεί να δοκιμάσει στο πλαίσιο αυτό τις δικές του ιδέες και να καταλήξει στα δικά του συμπεράσματα τα οποία πρέπει να έχουν την ανάλογη κοινωνική αποδοχή (στο πλαίσιο της τάξης) και την επιστημονική τεκμηρίωση. Η χρήση των τεχνολογικών εργαλείων αναμένεται να διευκολύνει σημαντικά προς αυτή τη κατεύθυνση. Η εργασία των μαθητών σε ομάδες και η στενή, συνεχής και συγκροτημένη συνεργασία μεταξύ των μαθητών της κάθε ομάδας προφανώς θα συμβάλει στην αλλαγή της στάσης τους απέναντι στη μάθηση.

Πλαίσιο εφαρμογής:

Σε ποιους απευθύνεται:

Το σενάριο απευθύνεται σε μαθητές της Γ' Λυκείου και αναφέρεται στο Β' Μέρος (Ανάλυση) και στην παράγραφο 3.4

«Το Ορισμένο Ολοκλήρωμα».

Χρόνος υλοποίησης:

Για την εφαρμογή του σεναρίου εκτιμάται ότι απαιτούνται 3 διδακτικές ώρες. Η αξιολόγηση των μαθητών με ασκήσεις εφαρμογής πάνω στην νέα γνώση όπως και τεστ θεωρίας θα εφαρμοστούν από τους μαθητές στο σπίτι.

Χώρος υλοποίησης:

Το σενάριο προτείνεται να διεξαχθεί εξ' ολοκλήρου στο εργαστήριο υπολογιστών.

Προαπαιτούμενες γνώσεις:

Οι μαθητές πρέπει να γνωρίζουν:

Για τη διεξαγωγή του σεναρίου απαιτείται:

- Υπολογιστής ή τάμπλετ για κάθε δύο μαθητές.
- Το λογισμικό Geogebra.
- Τρία φύλλα εργασίας και ένα φύλλο εργασίας για αξιολόγηση.
- Κόλλες αναφοράς και στυλό.

Ως προς τα μαθηματικά:

Οι μαθητές πρέπει να αναγνωρίζουν:

- Το εμβαδόν ορθογωνίου παραλληλογράμμου
- Τον τρόπο γραφής ενός αθροίσματος (το δίνει ο διδάσκων)

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x = f(\xi_1) \Delta x + f(\xi_2) \Delta x + \dots + f(\xi_n) \Delta x$$

- Το όριο μιας ακολουθίας όταν το $n \rightarrow +\infty$
- Το κριτήριο παρεμβολής
- Τα γνωστά αθροίσματα από την θεωρία αριθμών (τα δίνει ο διδάσκων)

$$1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2 = \frac{(n-1) \cdot n \cdot (2n-1)}{6}$$

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$$

- Στοιχειώδη χειρισμό του προγράμματος Geogebra

Ως προς την τεχνολογία:

Οι μαθητές θα πρέπει να χρησιμοποιούν βασικές λειτουργίες του υπολογιστή.

Απαιτούμενα βοηθητικά υλικά και εργαλεία:

Στους μαθητές θα δοθούν κατάλληλα φύλλα εργασίας που θα εκπονήσει ο διδάσκων και αναλυτικές οδηγίες (προφορικά ή γραπτά) για την υλοποίηση του σεναρίου.

Κοινωνική ενσχυρήστρωση της τάξης:

Οι μαθητές τις 3 ώρες εργαζόμενοι σε δυάδες και καθοδηγούμενοι από τον εκπαιδευτικό θα αναπτύξουν τις δραστηριότητες που θα οδηγήσουν στη σταδιακή ανακάλυψη της νέας γνώσης. Η αξιολόγηση θα γίνει στο σπίτι των μαθητών, όπου καλούνται να εφαρμόσουν τη νέα γνώση και να απαντήσουν σε συγκεκριμένες ερωτήσεις θεωρίας.

Στη διάρκεια της υλοποίησης του σεναρίου ο εκπαιδευτικός θα πρέπει να ελέγχει τα συμπεράσματα των μαθητών, να συνεργάζεται μαζί τους, να τους καθοδηγεί ώστε να αντιλαμβάνονται καλύτερα τα αποτελέσματά τους και να τους ενθαρρύνει να συνεχίσουν την διερεύνηση.

Η επικοινωνία όλων των μαθητών της τάξης με τις εργασίες των συμμαθητών τους και η συλλογική διερεύνηση κρίσιμων παραμέτρων της μαθησιακής διαδικασίας μπορεί επίσης ενισχυθεί με κατάλληλη χρήση του διαδραστικού πίνακα σε διαφορετικές πτυχές της εφαρμογής των δραστηριοτήτων του σεναρίου.

Στόχοι:

Από την εφαρμογή του συγκεκριμένου σεναρίου οι μαθητές θα μάθουν να ανακαλύπτουν τη γνώση συνεργατικά, να πειραματίζονται, να παρατηρούν, να ανταλλάσσουν απόψεις και να διατυπώνουν εικασίες.

Επίσης με τη βοήθεια των προτεινόμενων εργαλείων δυναμικού χειρισμού (δρομείς), θα προσεγγίσουν με την μέθοδο της εξαντλήσεως τον υπολογισμό του παραβολικού χωρίου και θα το συνδέσουν με την έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος προκειμένου να προκύψουν σωστά εποπτικά συμπεράσματα.

Πιο συγκεκριμένα οι μαθητές μετά την ολοκλήρωση αυτής της διδασκαλίας:

1. Θα έχουν ανακαλύψει τον υπολογισμό του παραβολικού χωρίου
2. Θα έχουν διερευνήσει την έννοια και τη σημασία του ορισμένου ολοκληρώματος
3. Θα έχουν κατανοήσει τις ιδιότητες και τα θεωρήματα που διέπουν το ορισμένο ολοκλήρωμα

Ανάλυση του σεναρίου:

1η διδακτική ώρα

Ροή εφαρμογής των δραστηριοτήτων:

Αρχικά θα δοθούν κάποιες οδηγίες για τη χρήση του λογισμικού. Επίσης οδηγίες για τη χρήση δρομέων ή "σύρσιμο" του ποντικιού ή αυτόματη κίνηση ώστε οι μαθητές

να διερευνήσουν τις δυναμικές κινήσεις των δρομέων, καθώς και η καταγραφή των αποτελεσμάτων σε ένα υπολογιστικό φύλλο.

Τα διαδραστικά εργαλεία και οι δυναμικές μεταβολές βοηθούν σε πολύ μεγάλο βαθμό τους μαθητές που έχουν μαθησιακές δυσκολίες στην κατανόηση των εννοιών στο μάθημα των Μαθηματικών. Με τη βοήθεια του προτεινόμενου λογισμικού, των διαδραστικών και δυναμικών εργαλείων και του ποντικιού, θα μπορούν να συμμετέχουν ενεργά στη μαθησιακή διαδικασία και θα μπορούν μόνοι τους να παρατηρήσουν και να κατανοήσουν τις έννοιες που αναφέραμε. Κατόπιν ο διδάσκων αφιερώνει λίγο χρόνο (5-7 λεπτά) για να δώσει στους μαθητές μερικά ιστορικά στοιχεία που δυναμικά θα εφαρμόσουν και αυτοί στη συνέχεια του μαθήματος. Ο διδάσκων ρωτά:

Τι ονομάζουμε εμβαδόν ενός επιπέδου σχήματος (χωρίου) και πως υπολογίζεται αυτό;

Ιστορικό Σημείωμα:

Το πρόβλημα μελετήθηκε από τον Αρχιμήδη (287-212 π.χ) που υπολόγισε τέτοια εμβαδά με τη "μέθοδο της εξάντλησης", που αποδίδεται στον Εύδοξο (408-355 π.χ).

Προσεγγίζουμε το χωρίο με ένα εγγεγραμμένο πολύγωνο που το εμβαδόν του είναι ορισμένο. Επιλέγουμε ένα δεύτερο εγγεγραμμένο, που περιβάλλει το πρώτο και έχουμε μία καλύτερη προσέγγιση του χωρίου. Συνεχίζοντας όμοια μπορούμε να "εξαντλήσουμε" όλο το χωρίο και να πάρουμε ως εμβαδόν του το όριο των εμβαδών.

Ο Αρχιμήδης εφάρμοσε με επιτυχία τη γενική αυτή μέθοδο για τον κυκλικό δίσκο και για τα παραβολικά χωρία.

Δηλαδή, εγγράφουμε στον κύκλο κανονικό πολύγωνο και διχοτομώντας τα τόξα κατασκευάζουμε κανονικό πολύγωνο με διπλάσιο αριθμό πλευρών και συνεχίζοντας κατασκευάζουμε μία ακολουθία εγγεγραμμένων πολυγώνων, με εμβαδά ε_n . Στη συνέχεια, στις κορυφές κάθε εγγεγραμμένου κανονικού πολυγώνου φέρνουμε εφαπτόμενες και παίρνουμε μία ακολουθία περιγεγραμμένων κανονικών πολυγώνων, με εμβαδά E_n . Η ακολουθία ε_n είναι αύξουσα και φραγμένη, ενώ η ακολουθία E_n είναι φθίνουσα και φραγμένη.

Επομένως συγκλίνουν και μάλιστα αποδεικνύεται, έχουν το ίδιο όριο, που

ονομάζεται εμβαδόν κυκλικού δίσκου E . Οπότε:
$$E = \lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} E_n$$

Μετά από αυτήν την εισαγωγή που ο εκπαιδευτικός έδωσε την ιστορική αναδρομή της μεθόδου υπολογισμού του εμβαδού χωρίου, οι μαθητές κατά την εκτέλεση αυτού του σεναρίου θα εμπλακούν στις παρακάτω δραστηριότητες:

Στη φάση αυτή καλούνται οι μαθητές να εργαστούν με μικροπειράματα με στόχο να εξηγήσει ο εκπαιδευτικός τον τρόπο με τον οποίο θα προσεγγιστεί ο υπολογισμός του εμβαδού ενός καμπυλόγραμμου χωρίου.

Ζητείται από τους μαθητές να ανοίξουν το αρχείο με όνομα «Μέθοδος Εξαντλήσεως.ggb» που βρίσκεται στο μάθημα Μαθηματικά Γ Λυκείου στο e-class. Τους δίνεται το 1^ο φύλλο εργασίας.

Φάση 1^η : «Υπολογισμός του παραβολικού χωρίου»

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 1^ο

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΑ ΟΜΑΔΑΣ ΜΑΘΗΤΩΝ : 1)
2)

Φάση 1^η : (με χρήση του αρχείου Μέθοδος Εξαντλήσεως.ggb)

Ζητείται από τους μαθητές να σχεδιάσουν την παραβολή: $f(x) = x^2$ για $x \geq 0$
Ζητείται να υπολογίσουν το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την $f(x)$, τις ευθείες $x = 0$ και $x = 1$ και τον άξονα x' .

Ο διδάσκων βοηθά τους μαθητές στο πλαίσιο εισαγωγής της συνάρτησης να χρησιμοποιήσουν την εντολή «Αν(<Όρος>, <Τότε>)».

Οι μαθητές έχουν εξοικειωθεί με το λογισμικό geogebra μιας και είναι το τρίτο σενάριο που υλοποιούν με το λογισμικό αυτό. Η γραφική παράσταση σχεδιάστηκε.

Οι μαθητές παρατηρούν ότι το εμβαδόν που καλούνται να υπολογίσουν έχει από την μία πλευρά καμπύλη, οπότε δεν υπάρχει κάποιος γνωστός τύπος της Ευκλείδειας Γεωμετρίας για να υπολογιστεί.

Ζητείται από τους μαθητές να δημιουργήσουν δρομείς από το μενού του λογισμικού και ο διδάσκων βοηθά στα ελάχιστα και μέγιστα όρια που θα βάλουν οι μαθητές.

Αναμένεται οι μαθητές να σχηματίσουν τους εξής δρομείς με την βοήθεια του εκπαιδευτικού:

a (min=-5, max=5), το αριστερό άκρο της οριοθέτησης του χωρίου

b (min=a, max=5), το δεξιό άκρο της οριοθέτησης του χωρίου

c (min=1, max=50, βήμα=1), αριθμός ορθογωνίων

ξ_k (min=0, max=1, βήμα= 1/c), ενδιαμέσες τιμές των ορθογωνίων

Ο διδάσκων ζητά από τους μαθητές να τοποθετήσουν σε συγκεκριμένες θέσεις τους δρομείς:

a (0)

b (1)

c (10)

ξ_k (0.5)

Στη συνέχεια ζητείται στην γραμμή εισαγωγής που βρίσκεται στο κάτω μέρος του λογισμικού οι μαθητές να γράψουν με ελληνικά και το πρώτο γράμμα κεφαλαίο την λέξη ΚάτωΑθροισμα, το geogebra θα τους βγάλει την εντολή έτοιμη:

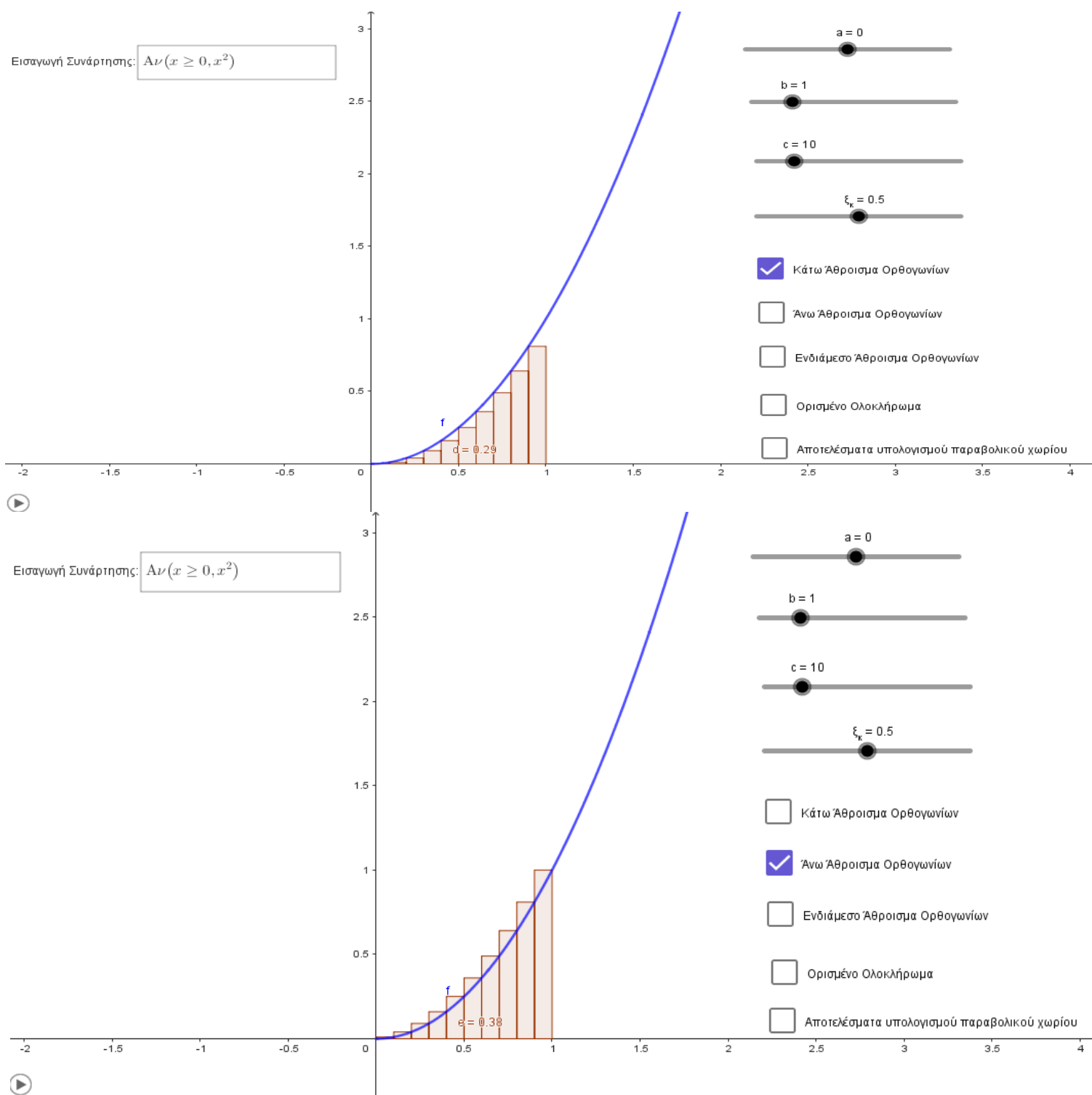
«ΚάτωΑθροισμα(<Συνάρτηση>, <Αρχική τιμή x>, <Τελική τιμή x>, <Αριθμός ορθογωνίων>)».

Αναμένεται οι μαθητές να συμπληρώσουν την παραπάνω εντολή και να εμφανιστούν 10 ορθογώνια των οποίων οι πάνω πλευρές τους είναι κάτω από την καμπύλη.

Ζητείται τότε από τους μαθητές να τσεκάρουν το αντίστοιχο κουτάκι «Κάτω Άθροισμα Ορθογωνίων» από το αρχείο geogebra και να επαληθεύσουν αυτό που υπολόγισαν εφαρμόζοντας την κατάλληλη εντολή, (βλέπε σχήμα 1).

Κατόπιν, ζητείται στην γραμμή εισαγωγής που βρίσκεται στο κάτω μέρος του λογισμικού οι μαθητές να γράψουν με ελληνικά και το πρώτο γράμμα κεφαλαίο την λέξη ΠάνωΑθροισμα, το geogebra θα τους βγάλει την εντολή έτοιμη:

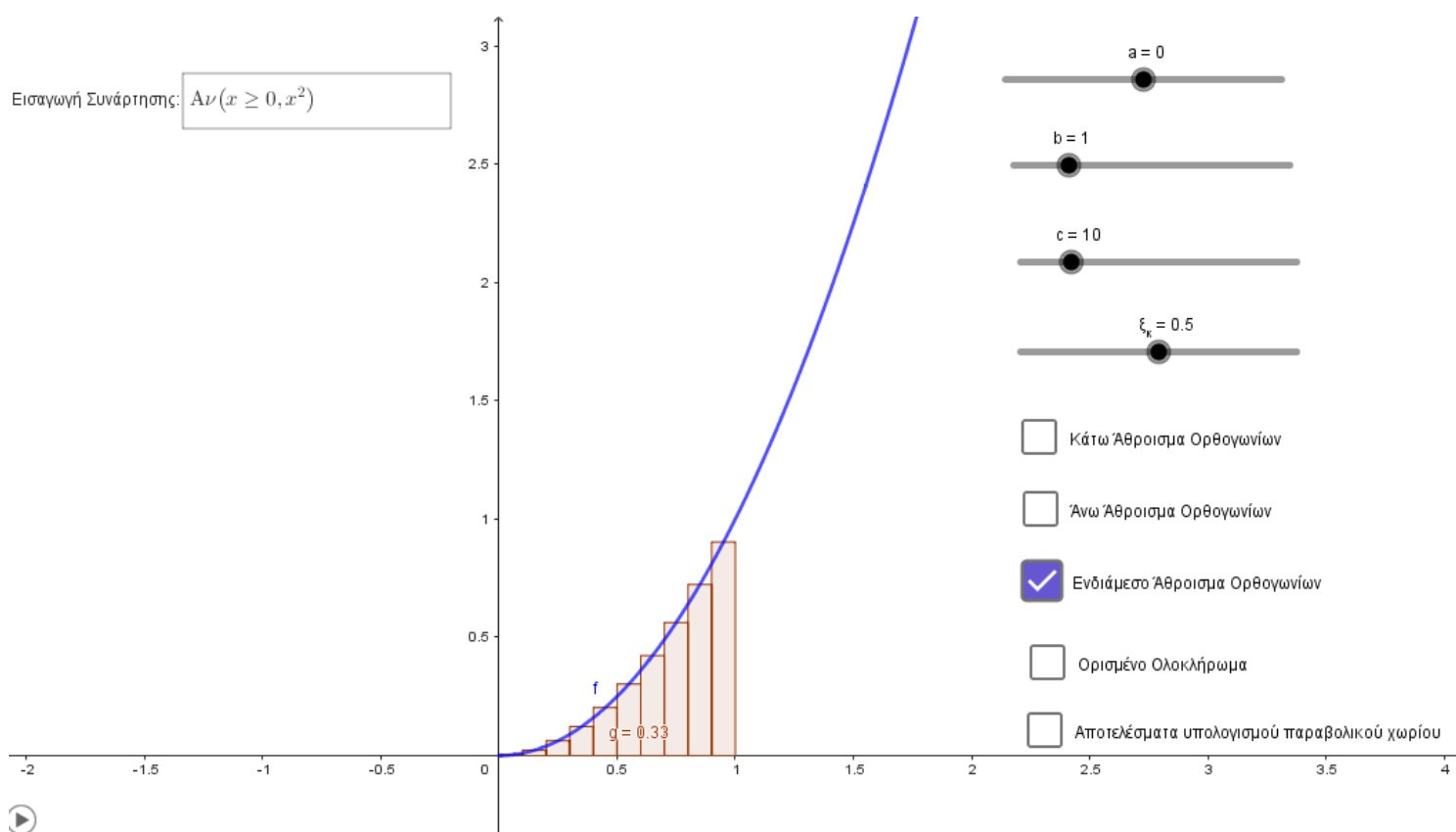
Ζητείται τότε από τους μαθητές να τσεκάρουν το αντίστοιχο κουτάκι «Άνω Άθροισμα Ορθογωνίων» από το αρχείο geogebra και να επαληθεύσουν αυτό που υπολόγισαν εφαρμόζοντας την κατάλληλη εντολή, (βλέπε σχήμα 2).



Ακόμη, ζητείται στην γραμμή εισαγωγής που βρίσκεται στο κάτω μέρος του λογισμικού οι μαθητές να γράψουν με ελληνικά και το πρώτο γράμμα κεφαλαίο την λέξη ΑθροισμαΟρθογωνίων, το geogebra θα τους βγάλει την εντολή έτοιμη: «ΑθροισμαΟρθογωνίων(<Συνάρτηση>, <Αρχική τιμή x>, <Τελική τιμή x>, <Αριθμός ορθογωνίων>, <Θέση για το ορθογώνιο(αριστερά-δεξιά (0-1)>)».

Αναμένεται οι μαθητές να συμπληρώσουν την παραπάνω εντολή (χωρίς την τελευταία παράμετρό της) και να εμφανιστούν 10 ορθογώνια των οποίων οι πάνω πλευρές τους τέμνονται από την καμπύλη.

Ζητείται τότε από τους μαθητές να τσεκάρουν το αντίστοιχο κουτάκι «Ενδιάμεσο Άθροισμα Ορθογωνίων» από το αρχείο geogebra και να επαληθεύσουν αυτό που υπολόγισαν εφαρμόζοντας την κατάλληλη εντολή, (βλέπε σχήμα 3).



Τέλος, ζητείται στην γραμμή εισαγωγής που βρίσκεται στο κάτω μέρος του λογισμικού οι μαθητές να γράψουν με ελληνικά και το πρώτο γράμμα κεφαλαίο την λέξη Ολοκλήρωμα, το geogebra θα τους βγάλει την εντολή έτοιμη: «Ολοκλήρωμα(<Συνάρτηση>, <Αρχική τιμή x>, <Τελική τιμή x>)».

Αναμένεται οι μαθητές να συμπληρώσουν την παραπάνω εντολή και να εμφανιστεί το χωρίο που περικλείεται από την συνεχή συνάρτηση f, τον άξονα x και τις ευθείες x=0 και x=1.

Ο διδάσκων ρωτά:

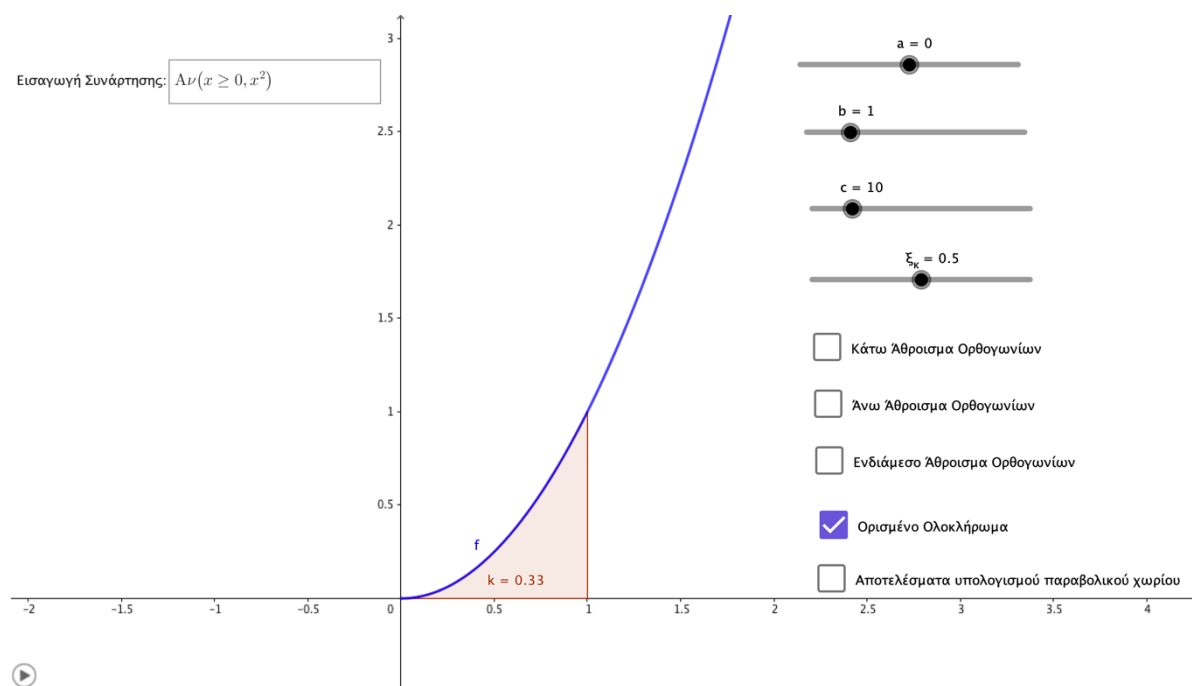
Τι παρατηρείται στο ενδιάμεσο άθροισμα και στο ορισμένο ολοκλήρωμα;

Αναμένεται οι μαθητές να παρατηρήσουν ότι είναι ίσα.

Ζητά, τότε, από τους μαθητές να διατυπώσουν μία εικασία πάνω σε αυτήν την παρατήρηση.

Αναμένεται οι μαθητές να υποψιαστούν ότι το ορισμένο ολοκλήρωμα είναι το ενδιάμεσο άθροισμα όταν ο αριθμός των ορθογωνίων που χωρίζει το καμπυλόγραμμο χωρίο, τείνει στο άπειρο.

Ο διδάσκων ενημερώνει τους μαθητές ότι το ορισμένο ολοκλήρωμα θα οριστεί αλγεβρικά στην επόμενη διδακτική ώρα και θα συνδεθεί με τον υπολογισμό του ενδιάμεσου αθροίσματος.



Ο διδάσκων προτρέπει τους μαθητές να παρατηρήσουν το εμβαδόν του καμπυλόγραμμου χωρίου στις τέσσερις περιπτώσεις.

Αναμένεται οι μαθητές να απαντήσουν:

- Στο Κάτω άθροισμα των Ορθογωνίων το εμβαδόν είναι: 0.29
- Στο Πάνω άθροισμα των Ορθογωνίων το εμβαδόν είναι: 0.38
- Στο Ενδιάμεσο άθροισμα των Ορθογωνίων το εμβαδόν είναι: 0.33
- Στο Ορισμένο Ολοκλήρωμα το εμβαδόν είναι: 0.33

Προτρέπει τότε, τους μαθητές να επιλέξουν τον δρομέα c, την τιμή 20 και να υπολογίσουν δυναμικά με το geogebra τα παραπάνω αθροίσματα.

Αναμένεται οι μαθητές να απαντήσουν:

- Στο Κάτω άθροισμα των Ορθογωνίων το εμβαδόν είναι: 0.31
- Στο Πάνω άθροισμα των Ορθογωνίων το εμβαδόν είναι: 0.36
- Στο Ενδιάμεσο άθροισμα των Ορθογωνίων το εμβαδόν είναι: 0.33
- Στο Ορισμένο Ολοκλήρωμα το εμβαδόν είναι: 0.33

Προτρέπει τότε, τους μαθητές να επιλέξουν τον δρομέα c, την τιμή 30 και να υπολογίσουν δυναμικά με το geogebra τα παραπάνω αθροίσματα.

Αναμένεται οι μαθητές να απαντήσουν:

- Στο Κάτω άθροισμα των Ορθογωνίων το εμβαδόν είναι: 0.32
- Στο Πάνω άθροισμα των Ορθογωνίων το εμβαδόν είναι: 0.35
- Στο Ενδιάμεσο άθροισμα των Ορθογωνίων το εμβαδόν είναι: 0.33
- Στο Ορισμένο Ολοκλήρωμα το εμβαδόν είναι: 0.33

Πρώτα ο εκπαιδευτικός, τι παρατηρείται;

Αναμένεται οι μαθητές να παρατηρήσουν ότι όσο μεγαλώνει ο αριθμός των ορθογωνίων που χωρίζουν το καμπυλόγραμμο χωρίο, τόσο οι τιμές των παραπάνω αθροισμάτων πλησιάζουν μεταξύ τους.

Τους προτρέπει να τσεκάρουν το κουτάκι «Αποτελέσματα υπολογισμού παραβολικού χωρίου» και οι μαθητές παρατηρούν τον πίνακα που εμφανίζεται να έχει όλες τις μετρήσεις των αθροισμάτων και τις διαφορές μεταξύ τους.

Ο διδάσκων εξηγεί τα σύμβολα που εμφανίζονται στις στήλες του υπολογιστικού φύλλου ώστε οι μαθητές να συγκρίνουν και να βγάλουν τα απαραίτητα συμπεράσματα.

Έτσι:

c = αριθμός ορθογωνίων

d = το κάτω άθροισμα

e = το πάνω άθροισμα

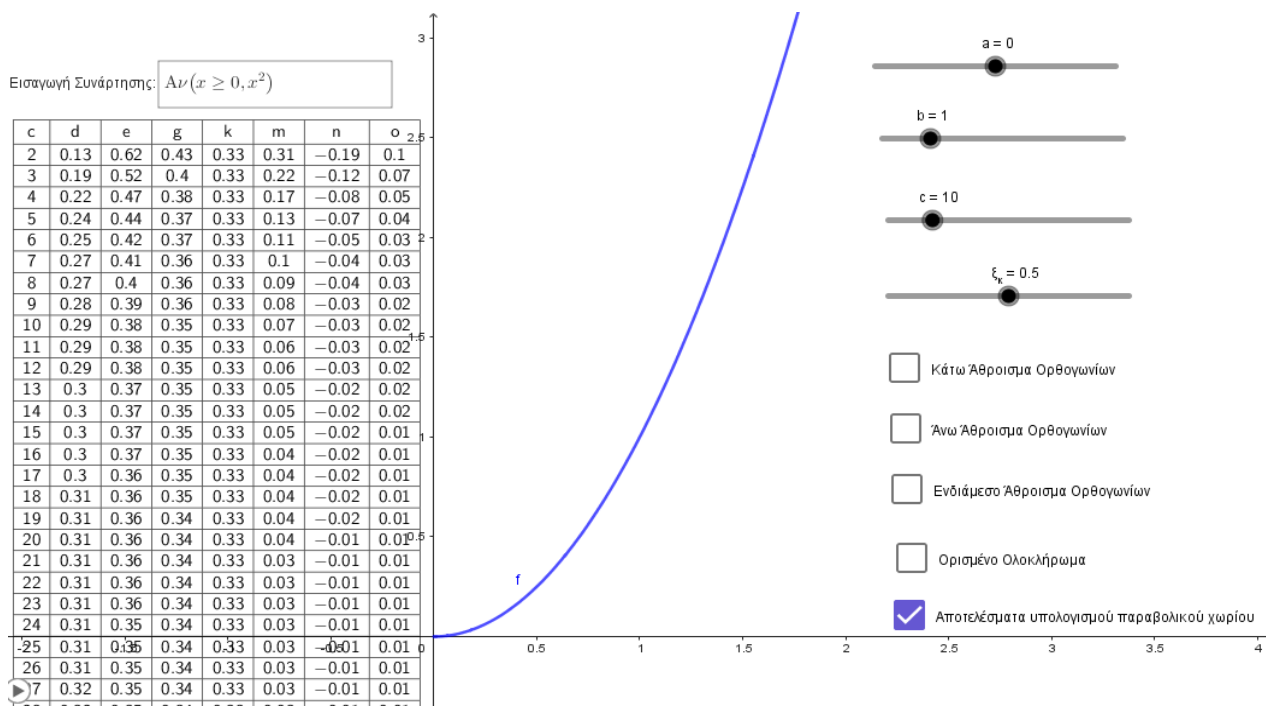
g = το ενδιάμεσο άθροισμα

k = το ορισμένο ολοκλήρωμα

m = η διαφορά του ορισμένου ολοκληρώματος με το κάτω άθροισμα

n = η διαφορά του ορισμένου ολοκληρώματος με το πάνω άθροισμα

o = η διαφορά του ορισμένου ολοκληρώματος με το ενδιάμεσο άθροισμα



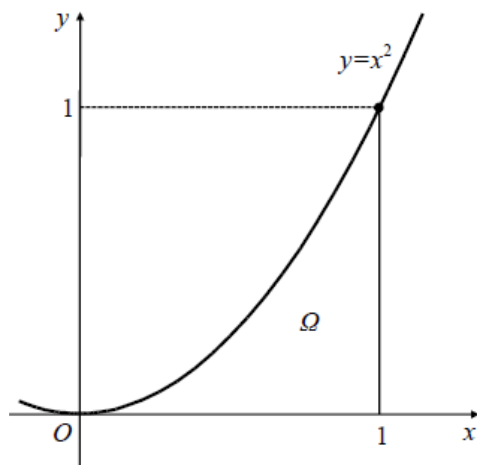
Έτσι τελείωσε η 1^η διδακτική ώρα του σεναρίου, καθώς με την βοήθεια του λογισμικού έδωσε στους μαθητές την ευκαιρία να εμπλακούν και να κατανοήσουν την μέθοδο της εξάντλησης με τη χρήση ορθογωνίων σε ένα παραβολικό χωρίο. Στην 2^η διδακτική ώρα οι μαθητές θα εμπλακούν αλγεβρικά να αποδείξουν το εμβαδόν του παραβολικού χωρίου με την βοήθεια του εκπαιδευτικού. Τους δίνεται το 2^ο φύλλο εργασίας μαζί με κόλλες και στυλό.

**Φάση 2^η : «Αλγεβρικός Υπολογισμός του παραβολικού χωρίου – Ορισμός
Εμβαδού – Ορισμός Ορισμένου Ολοκληρώματος»**

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 2^ο

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΑ ΟΜΑΔΑΣ ΜΑΘΗΤΩΝ : 1)
2)

Φάση 2^η :



Μια αλγεβρική μέθοδος για να προσεγγιστεί το ζητούμενο εμβαδόν είναι η εξής :

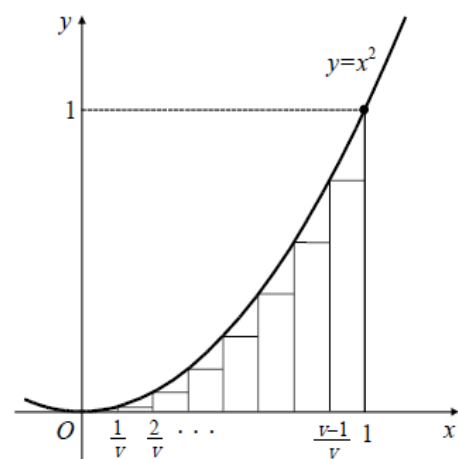
Βήμα 1^ο:

Χωρίστε το διάστημα $[0,1]$ σε n ισομήκη

διαστήματα μήκους $\Delta x = \frac{1}{n}$,

Οι μαθητές αναμένεται να γράψουν:

$$0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \dots, 1$$



Βήμα 2^ο:

Σχηματίστε τα ορθογώνια με βάσεις τα υποδιαστήματα αυτά και ύψη την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $f(x)$ σε καθένα από αυτά. Μια προσέγγιση του εμβαδού είναι το άθροισμα ε_n .

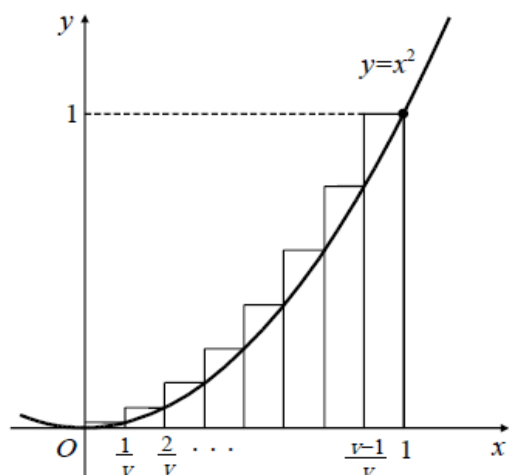
Οι μαθητές αναμένεται να γράψουν:

- Υπολογίστε τα ορθογώνια που σχηματίζονται κοιτώντας την αριστερή πάνω πλευρά για τιμή της συνάρτησης
- Βγάλτε κοινό παράγοντα το $\frac{1}{n}$
- Αντικαταστήστε στον αριθμητή την ποσότητα:

$$1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2 = \frac{(n-1) \cdot n \cdot (2n-1)}{6}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_n &= f(0) \cdot \frac{1}{n} + f\left(\frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} + \dots + f\left(\frac{n-1}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} = \\ &= \frac{1}{n} \cdot \left(0^2 + \frac{1^2}{n^2} + \dots + \frac{(n-1)^2}{n^2} \right) = \\ &= \frac{1}{n^3} \cdot (1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2) = \\ &= \frac{1}{n^3} \cdot \frac{(n-1) \cdot n \cdot (2n-1)}{6} = \frac{2n^2 - 3n + 1}{6n^2} \end{aligned}$$

$$\text{Άρα ισχύει: } \varepsilon_n = \frac{2n^2 - 3n + 1}{6n^2} \quad (1)$$



- Υπολογίστε τα ορθογώνια που σχηματίζονται κοιτώντας την δεξιά πάνω πλευρά για τιμή της συνάρτησης
- Βγάλτε κοινό παράγοντα το $\frac{1}{n}$
- Αντικαταστήστε στον αριθμητή την ποσότητα:

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$$

Βήμα 3^ο:

Σχηματίστε τα ορθογώνια με βάσεις τα υποδιαστήματα αυτά και ύψη την μέγιστη τιμή της συνάρτησης $f(x)$ σε καθένα από αυτά. Μια προσέγγιση του εμβαδού είναι το άθροισμα E_n .

Οι μαθητές αναμένεται να γράψουν:

$$E_n = f\left(\frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} + f\left(\frac{2}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} + \dots + f\left(\frac{n}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} =$$

$$\frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1^2}{n^2} + \frac{2^2}{n^2} + \dots + \frac{n^2}{n^2} \right) =$$

$$\frac{1}{n^3} \cdot (1^2 + 2^2 + \dots + n^2) =$$

$$\frac{1}{n^3} \cdot \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} = \frac{2n^2 + 3n + 1}{6n^2}$$

Άρα ισχύει: $E_n = \frac{2n^2 + 3n + 1}{6n^2} \quad (2)$

Βήμα 4^ο:

Ο εκπαιδευτικός ανακαλεί στην μνήμη των μαθητών τα συμπεράσματα που ανακάλυψαν στην 1^η διδακτική ώρα, δυναμικά με το λογισμό geogebra, δηλαδή τη σχέση έχουν τα τρία αθροίσματα μεταξύ τους, όταν το πλήθος των ορθογωνίων τείνει στο άπειρο;

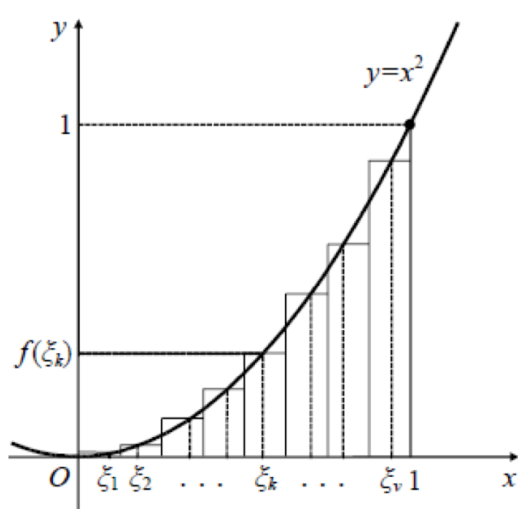
Οι μαθητές αναμένεται να γράψουν: $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n \leq E \leq \lim_{n \rightarrow \infty} E_n$.

Επειδή όμως από την σχέση (1): $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 3n + 1}{6n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2}{6n^2} = \frac{1}{3}$

Επίσης από την σχέση (2): $\lim_{n \rightarrow \infty} E_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 3n + 1}{6n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2}{6n^2} = \frac{1}{3}$

Από το κριτήριο παρεμβολής $E = \frac{1}{3}$ τ.μ.

Βήμα 5^ο:



Σχηματίστε τα ορθογώνια με βάσεις τα υποδιαστήματα $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, \dots, n$ και ύψη την τιμή της συνάρτησης $f(x)$ σε οποιοδήποτε ενδιάμεσο σημείο ξ_k , $k = 1, 2, \dots, n$ καθενός διαστήματος. Μια προσέγγιση του εμβαδού είναι το άθροισμα S_n .

Οι μαθητές αναμένεται να γράψουν:

$$S_n = \frac{1}{n} f(\xi_1) + \dots + \frac{1}{n} f(\xi_n)$$

- Γράψτε την σχέση που έχουν οι τιμές της συνάρτησης λαμβάνοντας υπόψη την σχέση που έχουν οι αντίστοιχες τιμές στον άξονα x
Δηλαδή: $x_{k-1} < \xi_k < x_k$
(f γνήσια αύξουσα στο $[0, +\infty)$)
- Πολλαπλασιάστε με το $\frac{1}{n}$
- Τι παρατηρείται στην διτλή ανίσωση;

Οι μαθητές αναμένεται να γράψουν:

$$f(x_{k-1}) \leq f(\xi_k) \leq f(x_k)$$

Οι μαθητές αναμένεται να γράψουν:

$$\frac{1}{n} \cdot f(x_{k-1}) \leq \frac{1}{n} \cdot f(\xi_k) \leq \frac{1}{n} \cdot f(x_k)$$

οπότε θα ισχύει: $\varepsilon_n \leq S_n \leq E_n$

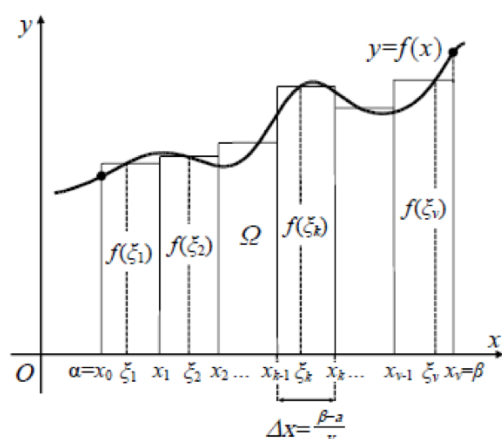
Είναι όμως $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = \frac{1}{3}$ και $\lim_{n \rightarrow \infty} E_n = \frac{1}{3}$

Από κριτήριο παρεμβολής: $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{3}$, άρα

$$S_n = \frac{1}{3} \text{ τ.μ}$$

Βήμα 6^ο:

Ορισμός εμβαδού



Ο διδάσκων διατυπώνει τον ορισμό του εμβαδού χωρίου, ως μία νέα εφαρμογή, που περικλείεται από την συνάρτηση f , τον άξονα x και τις ευθείες $x = \alpha$, $x = \beta$.

Ορισμός:

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$, με $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και Ω το χωρίο που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα των x και τις ευθείες $x = \alpha$, $x = \beta$.

Για να ορίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω εργαστείτε όπως στο προηγούμενο άθροισμα. Δηλαδή:

- Χωρίστε το διάστημα $[\alpha, \beta]$ σε n ισομήκη υποδιαστήματα, μήκους $\Delta x = \frac{\beta - \alpha}{n}$,
Αναμένεται οι μαθητές να γράψουν:
τα σημεία $\alpha = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = \beta$
- Σε κάθε υποδιάστημα $[x_{k-1}, x_k]$ επιλέξτε αυθαίρετα ένα σημείο ξ_k και σχηματίστε τα ορθογώνια που έχουν βάση Δx και ύψη τα $f(\xi_k)$.
Το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων αυτών είναι:
Αναμένεται οι μαθητές να γράψουν:
$$S_n = f(\xi_1)\Delta x + f(\xi_2)\Delta x + \dots + f(\xi_n)\Delta x =$$
$$[f(\xi_1) + \dots + f(\xi_n)]\Delta x.$$
- Υπολογίστε το $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

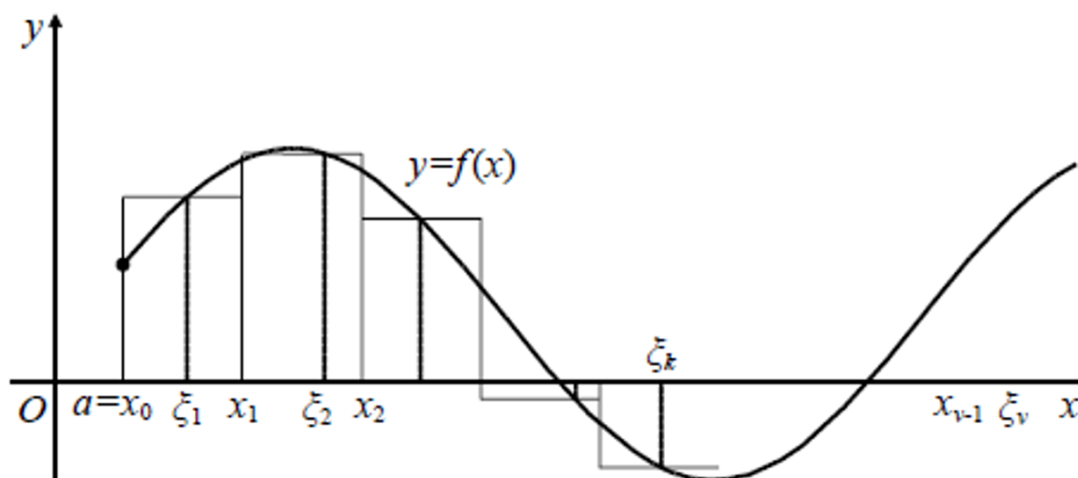
Ο διδάσκων ενημερώνει τους μαθητές ότι:

Αποδεικνύεται ότι το $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$ και είναι ανεξάρτητο από την επιλογή των σημείων ξ_k .

Το όριο αυτό ονομάζεται **εμβαδόν** του επιπέδου χωρίου Ω και συμβολίζεται με $E(\Omega)$.

Βήμα 7^ο:

Η Έννοια του Ορισμένου Ολοκληρώματος - Ορισμός



Ο διδάσκων συνδέει τον ορισμό του εμβαδού χωρίου, με την έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος, που περικλείεται από την συνεχή συνάρτηση f , τον άξονα x και τις ευθείες $x = \alpha$, $x = \beta$.

Δηλαδή:

Χωρίστε το διάστημα $[\alpha, \beta]$ σε n ισομήκη υποδιαστήματα, μήκους

$\Delta x = \frac{\beta - \alpha}{n}$, Αναμένεται οι μαθητές να γράψουν:

τα σημεία $\alpha = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = \beta$

- Σε κάθε υποδιάστημα $[x_{k-1}, x_k]$ επιλέξτε αυθαίρετα ένα σημείο ξ_k και σχηματίστε τα ορθογώνια που έχουν βάση Δx και ύψη τα $f(\xi_k)$.

Το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων αυτών είναι:

Αναμένεται οι μαθητές να γράψουν:

$$S_n = f(\xi_1)\Delta x + f(\xi_2)\Delta x + \dots + f(\xi_n)\Delta x = [f(\xi_1) + \dots + f(\xi_n)]\Delta x = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x$$

- Υπολογίστε το $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x)$

Το άθροισμα αυτό λέγεται άθροισμα Riemann.

Το $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$ και είναι ανεξάρτητο από την επιλογή των σημείων ξ_k .

Το όριο αυτό ονομάζεται **ορισμένο ολοκλήρωμα** της συνεχούς συνάρτησης f από το α στο β , συμβολίζεται με $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x)$

Τα α και β ονομάζονται άκρα της ολοκλήρωσης.

Με τους παραπάνω ορισμούς, του εμβαδού χωρίου και του ορισμένου ολοκληρώματος τελειώνει η 2^η διδακτική ώρα.

Στην επόμενη 3^η διδακτική ώρα του σεναρίου, ο εκπαιδευτικός καλεί τους μαθητές να ανοίξουν το αρχείο «Ιδιότητες Ορισμένου Ολοκληρώματος.ggb» και τους δίνεται το 3^ο φύλλο εργασίας.

Φάση 3η : «Ιδιότητες και θεωρήματα του Ορισμένου Ολοκληρώματος» ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 3^ο

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΑ ΟΜΑΔΑΣ ΜΑΘΗΤΩΝ : 1)
2)

Φάση 3η : (με χρήση των αρχείων Ιδιότητες Ορισμένου Ολοκληρώματος.ggb και Θεωρήματα Ορισμένου Ολοκληρώματος.ggb)

Σε αυτήν την διδακτική ώρα οι μαθητές θα εμπλακούν δυναμικά με το λογισμικό ώστε να ανακαλύψουν τις ιδιότητες και τα θεωρήματα του ορισμένου ολοκληρώματος.

Ζητείται από τους μαθητές να γράψουν στο κουτί εισαγωγής την συνάρτηση $f(x)=x^3$, στο κουτί εισαγωγής την συνάρτηση $g(x)=x^2$.

Αναμένεται οι γραφικές παραστάσεις των παραπάνω συναρτήσεων να σχεδιαστούν.

Επίσης, ζητείται από το μενού του geogebra οι μαθητές να σχηματίσουν τρεις δρομείς α , β , γ με ελάχιστη τιμή -100, μέγιστη τιμή 100 και βήμα 1.

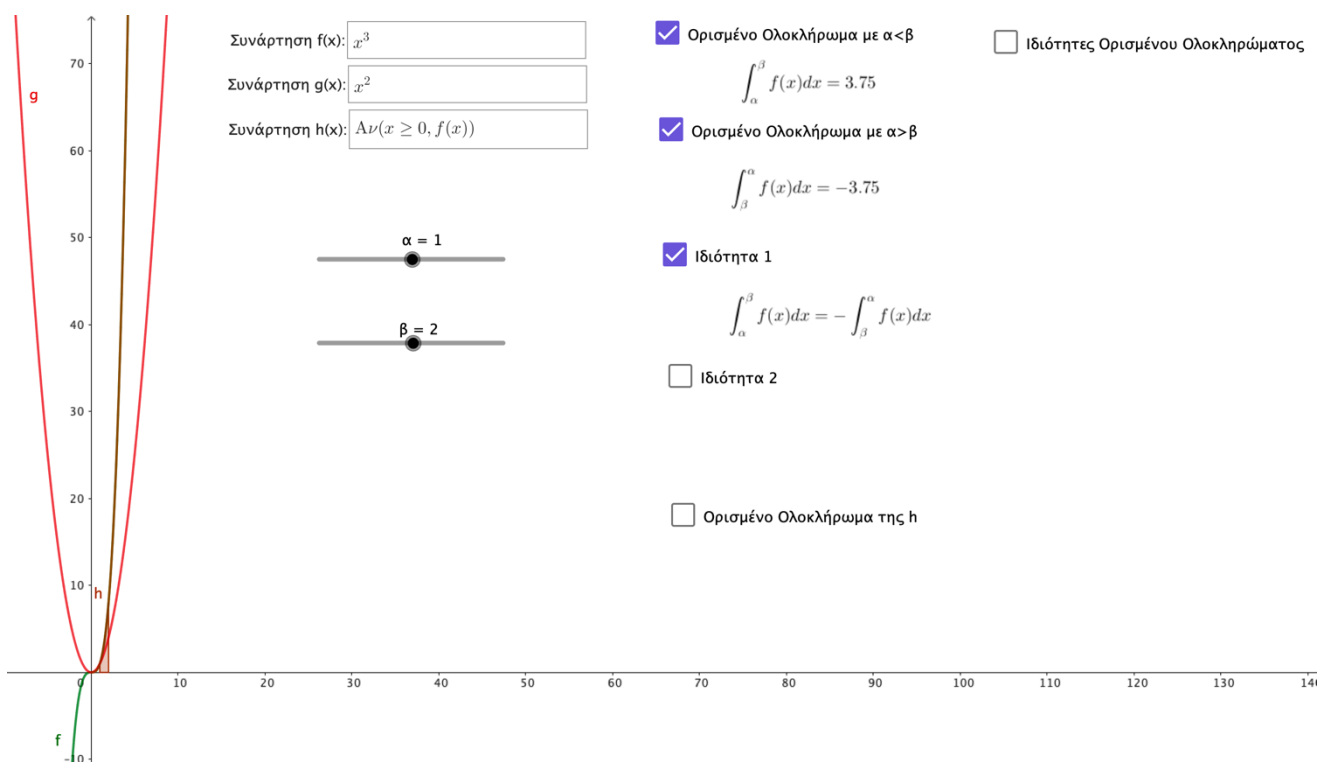
Τους ζητείται να βάλουν συγκεκριμένες τιμές στους δρομείς: $\alpha=1$, $\beta=2$, $\gamma=3$.

Αναμένεται οι μαθητές να σχεδιάσουν τους προαναφερθέντες δρομείς.

Όπως οι μαθητές κατασκεύασαν την 1^η διδακτική ώρα τα ζητούμενα αθροίσματα και ολοκληρώματα, έτσι και τώρα τους ζητείται στην γραμμή εισαγωγής να γράψουν την εντολή «Ολοκλήρωμα» και να συμπληρώσουν τις παραμέτρους της εντολής.

Στο πρώτο ολοκλήρωμα τους ζητείται να βάλουν κάτω άκρο το α και πάνω άκρο το β , ενώ στο επόμενο ολοκλήρωμα να βάλουν κάτω άκρο το β και πάνω το α .

Οι μαθητές παρατηρούν ότι τα αποτελέσματα των παραπάνω ολοκληρωμάτων είναι αντίθετα. Το ίδιο συμβαίνει αν αλλάξουν τις τιμές των δρομένων α , β , δηλαδή με διαφορετικές τιμές των άκρων.



Ο διδάσκων τότε, ζητά από τους μαθητές να διατυπώσουν την 1^η ιδιότητα των ορισμένων ολοκληρωμάτων.

Οι μαθητές αναμένεται να γράψουν: $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = - \int_{\beta}^{\alpha} f(x)dx$.

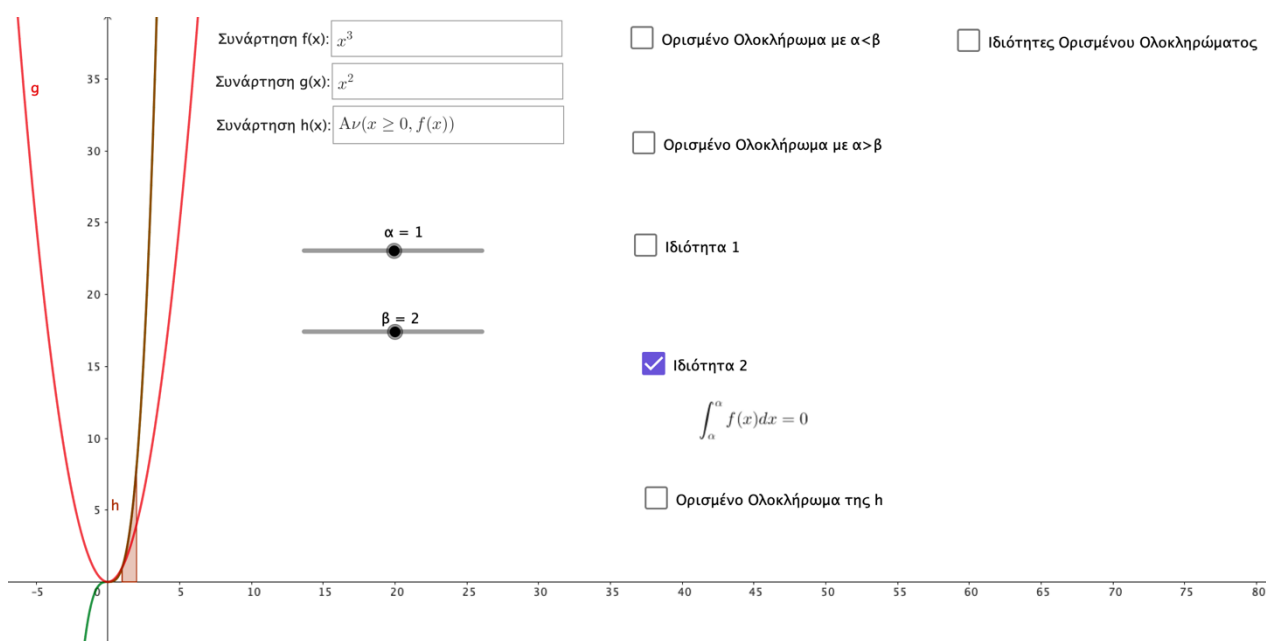
Στη συνέχεια, ζητείται στην γραμμή εισαγωγής να γράψουν την εντολή «Ολοκλήρωμα» και να συμπληρώσουν τις παραμέτρους της εντολής, αλλά βάζοντας για πάνω και για κάτω άκρο το α.

Αναμένεται οι μαθητές να παρατηρήσουν ότι η τιμή του ολοκληρώματος είναι 0.

Το ίδιο συμβαίνει αν αλλάξουν τις τιμές του δρομέα α.

Ο διδάσκων τότε, ζητά από τους μαθητές να διατυπώσουν την 2^η ιδιότητα των ορισμένων ολοκληρωμάτων.

Οι μαθητές αναμένεται να γράψουν: $\int_{\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 0$.



Επίσης, ο διδάσκων ζητά από τους μαθητές στο κουτί εισαγωγής να γράψουν την εντολή «Αν» και να συμπληρώσουν τις μεταβλητές τους, ώστε να δημιουργήσουν μια μη-αρνητική συνάρτηση $h(x) = x^3, x \geq 0$

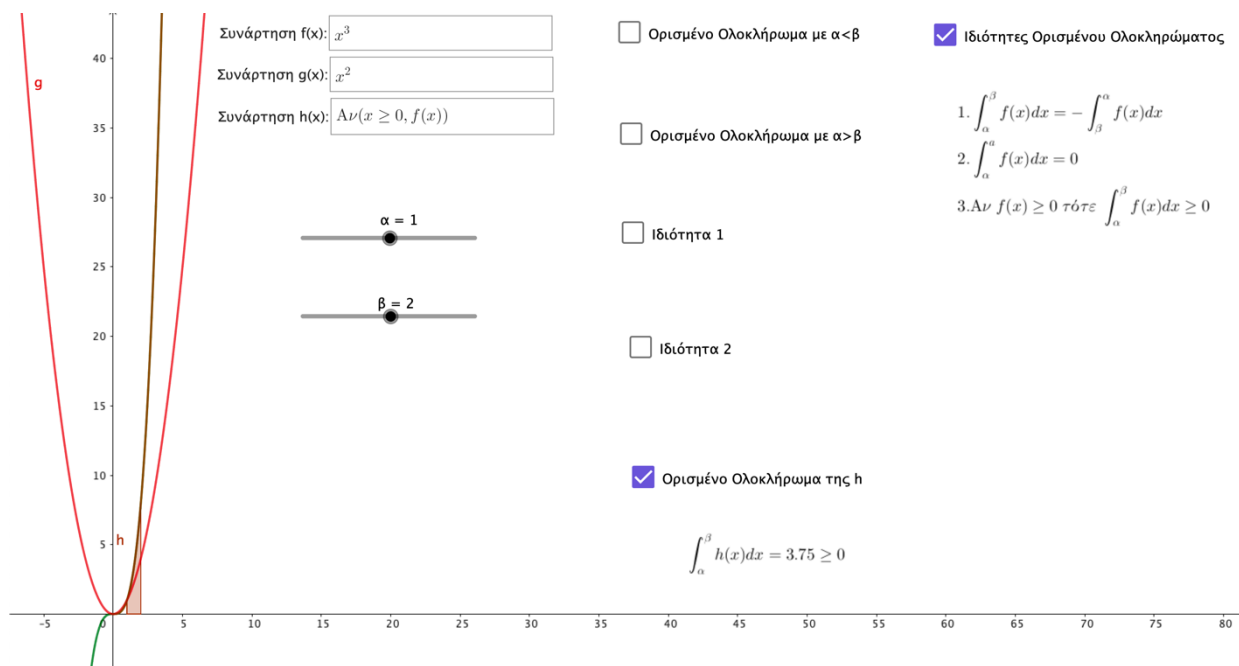
Τους ζητείται να υπολογίσουν το ορισμένο ολοκλήρωμα: $\int_{\alpha}^{\beta} h(x)dx$ με $\alpha < \beta$.

Οι μαθητές αναμένεται να υπολογίσουν το παραπάνω ολοκλήρωμα και να βρουν αποτέλεσμα μη-αρνητικό. Το ίδιο συμβαίνει για διαφορετικές τιμές των α και β με $\alpha < \beta$.

Ο διδάσκων τότε, ζητά από τους μαθητές να διατυπώσουν την 3^η ιδιότητα των ορισμένων ολοκληρωμάτων.

Οι μαθητές αναμένεται να γράψουν: Αν $f(x) \geq 0$ τότε: $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq 0$.

Με αυτόν τον δυναμικό τρόπο οι μαθητές ανακάλυψαν και διατύπωσαν τις τρεις ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος.



Στη συνέχεια οι μαθητές θα εμπλακούν δυναμικά να ανακαλύψουν με τη βοήθεια του λογισμικού και την καθοδήγηση του εκπαιδευτικού τα θεωρήματα που ισχύουν στα ορισμένα ολοκληρώματα.

Ζητείται από τους μαθητές να ανοίξουν ένα κενό αρχείο geogebra από το μενού Αρχείο → Νέο.

Τους προτρέπει ο εκπαιδευτικός να γράψουν στο κουτί εισαγωγής την συνάρτηση $f(x)=x^3$, στο κουτί εισαγωγής την συνάρτηση $g(x)=x^2$.

Αναμένεται οι γραφικές παραστάσεις των παραπάνω συναρτήσεων να σχεδιαστούν.

Επίσης, ζητείται από το μενού του geogebra οι μαθητές να σχηματίσουν τρεις δρομείς α , β , γ με ελάχιστη τιμή -100, μέγιστη τιμή 100 και βήμα 1.

Τους ζητείται να βάλουν συγκεκριμένες τιμές στους δρομείς: $\alpha=1$, $\beta=2$, $\gamma=3$.

Στη συνέχεια ο διδάσκων καλεί τους μαθητές να γράψουν στην γραμμή εισαγωγής την εντολή Ολοκλήρωμα και στη θέση της συνάρτησης να γράψουν f ή $2.f$ ή $3.f$ ή $4.f$

Ο διδάσκων ρωτά: Τι παρατηρείται;

Οι μαθητές αναμένεται να ανακαλύψουν την ιδιότητα:

$$\int_{\alpha}^{\beta} k \cdot f(x) dx = k \cdot \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$$

Ο εκπαιδευτικός ενημερώνει τους μαθητές ότι μπορούν να δημιουργήσουν έναν νέο δρομέα k και αντί για συγκεκριμένους αριθμούς 2, 3, 4 να πολλαπλασιάσουν τον δρομέα με την συνάρτηση, δηλαδή: $k \cdot f$

Επίσης ο εκπαιδευτικός ζητά από τους μαθητές να γράψουν στην γραμμή εισαγωγής την εντολή Ολοκλήρωμα και στην θέση της παραμέτρου της συνάρτησης να γράψουν $f+g$.

Ο διδάσκων ρωτά: Τι παρατηρείται;

Οι μαθητές αναμένεται να ανακαλύψουν την ιδιότητα:

$$\int_{\alpha}^{\beta} (f(x) + g(x)) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx + \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx$$

Τέλος, ο εκπαιδευτικός ζητά από τους μαθητές να γράψουν στην γραμμή εισαγωγής την εντολή Ολοκλήρωμα και στην θέση της παραμέτρου της συνάρτησης να γράψουν $2f+3g$.

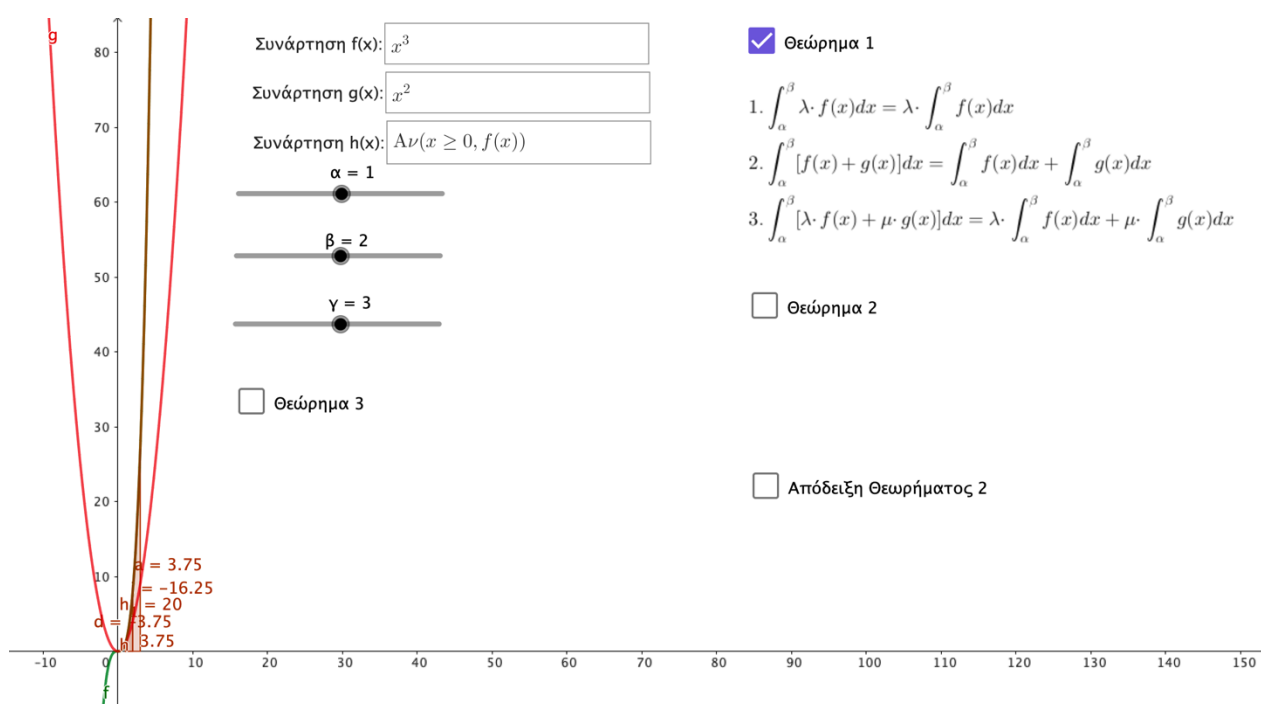
Ο διδάσκων ρωτά: Τι παρατηρείται;

Οι μαθητές αναμένεται να ανακαλύψουν την ιδιότητα:

$$\int_{\alpha}^{\beta} (\kappa \cdot f(x) + \lambda \cdot g(x)) dx = \kappa \cdot \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx + \lambda \cdot \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx$$

Ο εκπαιδευτικός ενημερώνει τους μαθητές ότι μπορούν να δημιουργήσουν έναν ακόμη δρομέα λ και αντί για συγκεκριμένους αριθμούς 2, 3, 4 να πολλαπλασιάσουν τους δρομείς με τις συναρτήσεις, δηλαδή: $\kappa \cdot f + \lambda \cdot g$

Καλεί ο διδάσκων τους μαθητές να ανοίξουν το αρχείο «Θεωρήματα Ορισμένου Ολοκληρώματος.ggb» και να επαληθεύσουν το 1^ο θεώρημα.



Στη συνέχεια ο εκπαιδευτικός ζητά από τους μαθητές να υπολογίσουν τρία ολοκληρώματα με τον ίδιο τρόπο που εργάστηκαν προηγουμένως.

Συγκεκριμένα τους ζητά να τοποθετήσουν τις τιμές των δρομέων στις θέσεις: $\alpha = 1$, $\beta = 3$, $\gamma = 2$. Τους ζητά να υπολογίσουν τα ολοκληρώματα:

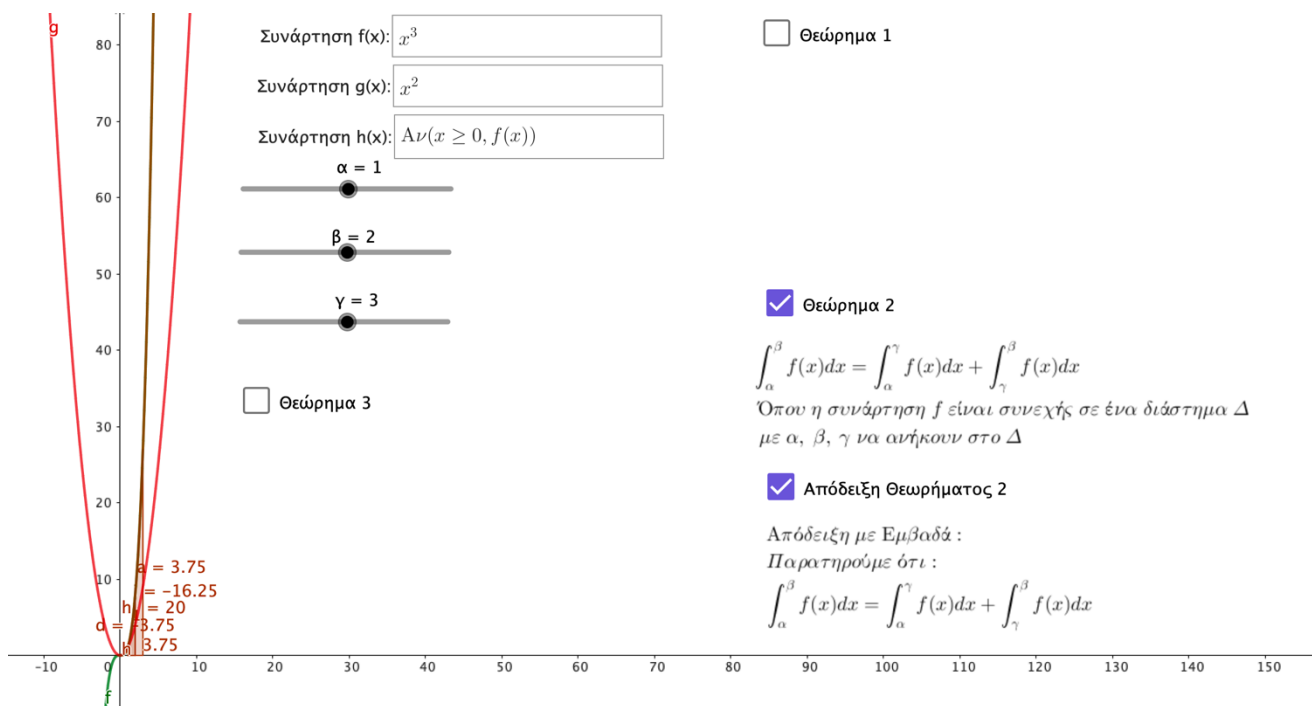
$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx, \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx \text{ και } \int_{\gamma}^{\beta} f(x) dx$$

Ο διδάσκων ρωτά: Τι παρατηρείται;

Οι μαθητές αναμένεται να ανακαλύψουν την ιδιότητα:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x) dx \text{ με } \alpha < \gamma < \beta.$$

Καλεί ο διδάσκων τους μαθητές να ανοίξουν το αρχείο «Θεωρήματα Ορισμένου Ολοκληρώματος.ggb» και να επαληθεύσουν το 2^ο θεώρημα.



Τελειώνοντας την 3^η διδακτική ώρα οι μαθητές θα ανακαλύψουν και το 3^ο θεώρημα. Τους ζητείται λοιπόν να σχηματίσουν μία συνάρτηση συνεχής, με $f(x) \geq 0$ και να μην είναι η f παντού μηδέν σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$.

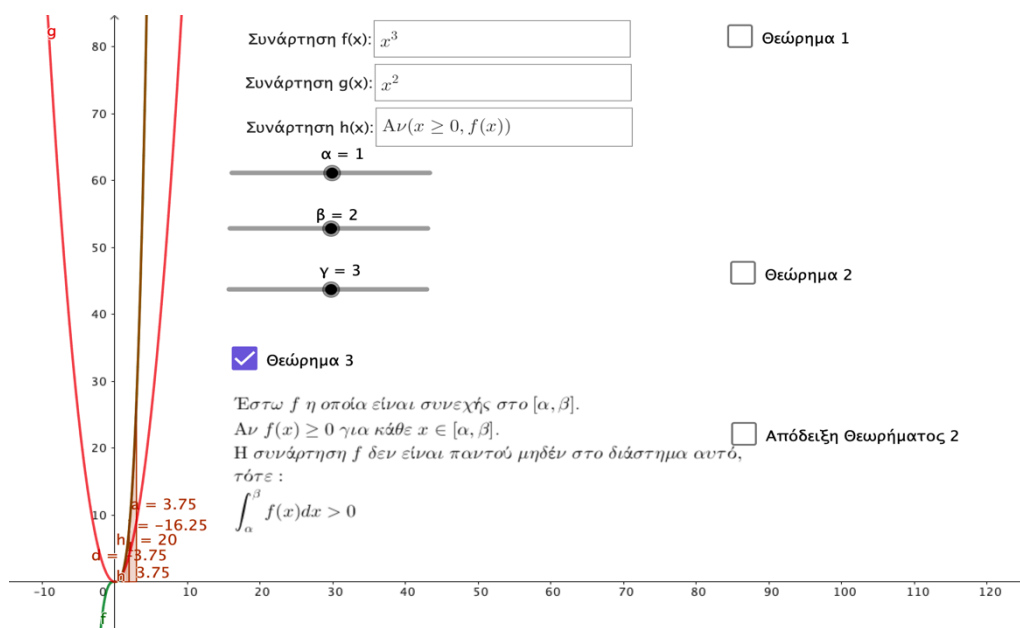
Μπορούν οι μαθητές να βρουν το ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta} h(x)dx$ με α και β θετικές τιμές και $\alpha < \beta$.

Ο διδάσκων ρωτά: Τι παρατηρείται;

Οι μαθητές αναμένεται να ανακαλύψουν την ιδιότητα:

Μία συνάρτηση f είναι συνεχής, με $f(x) \geq 0$ και η f να μην είναι παντού μηδέν σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$, τότε ισχύει: $\int_{\alpha}^{\beta} h(x)dx > 0$.

Καλεί ο διδάσκων τους μαθητές να ανοίξουν το αρχείο «Θεωρήματα Ορισμένου Ολοκληρώματος.ggb» και να επαληθεύσουν το 3^ο θεώρημα.



Με αυτόν τον τρόπο οι μαθητές ενεπλάκησαν στις αποδείξεις των θεωρημάτων ακολουθώντας τα βήματα του εκπαιδευτικού.

Η αξιολόγηση των μαθητών θα γίνει σε μορφή εργασιών στο σπίτι τους.

«Αξιολόγηση»

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 4^ο

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ ΜΑΘΗΤΗ/ΤΡΙΑΣ :

.....

1

Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$\int_0^3 f(x) dx = 6, \quad \int_0^5 f(x) dx = 10 \quad \text{και}$$

$$\int_5^7 f(x) dx = 3$$

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α) $\int_5^0 f(x) dx$ β) $\int_0^7 f(x) dx$

γ) $\int_5^3 f(x) dx$ δ) $\int_3^7 f(x) dx$

2

Δίνονται συνεχείς συναρτήσεις:

$$f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

για τις οποίες ισχύουν:

$$\int_1^3 (2f(x) - g(x)) dx = 9 \quad \text{και}$$

$$\int_1^3 (7f(x) + 2g(x)) dx = 4$$

Να βρείτε το $\int_3^1 (3f(x) - 4g(x)) dx$.

3

Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$\int_0^3 f(x) dx = \int_1^2 f(x) dx + \int_2^3 2f(x) dx$$

Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 f(x) dx = \int_2^3 f(x) dx$.

4

Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$\int_1^2 f(x) dx + \int_1^3 f(x) dx = \int_1^5 f(x) dx - \int_4^5 f(x) dx$$

Να αποδείξετε ότι $\int_1^2 f(x) dx = \int_3^4 f(x) dx$.

Επίσης οι μαθητές θα συνδεθούν στην ιστοσελίδα του παρακάτω συνδέσμου

<https://forms.gle/jNDg7NwEieaYcmoD8>

όπου θα απαντήσουν 5 ερωτήσεις θεωρίας.

Ορισμένο Ολοκλήρωμα

makariadis@gmail.com Εναλλαγή λογαριασμού



* Υποδεικνύει απαιτούμενη ερώτηση

Διεύθυνση ηλεκτρονικού ταχυδρομείου *

Η διεύθυνσή σας ηλεκτρονικού ταχυδρομείου...

1. Ερώτηση *

5 βαθμοί

$$\text{Ισχύει } \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) + g(x))dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx + \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$$

- ☐ Σωστό
☐ Λάθος

2. Ερώτηση *

5 βαθμοί

$$\text{Ισχύει } \int_{\alpha}^{\beta} f(x) \cdot g(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \cdot \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$$

- ☐ Σωστό
☐ Λάθος

3. Ερώτηση *

5 βαθμοί

$$\text{Αν } \alpha = \beta, \text{ τότε } \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 0.$$

- ☐ Σωστό
☐ Λάθος

4. Ερώτηση *

5 βαθμοί

$$\text{Αν } f(x) \geq 0 \text{ για κάθε } x \in [\alpha, \beta], \text{ τότε } \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq 0.$$

- ☐ Σωστό
☐ Λάθος

5. Ερώτηση *

5 βαθμοί

$$\text{Αν } \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq 0, \text{ τότε κατ' ανάγκη θα είναι } f(x) \geq 0 \text{ για κάθε } x \in [\alpha, \beta].$$

- ☐ Σωστό
☐ Λάθος

Επέκταση του σεναρίου:

Ως προς την επέκταση του σεναρίου μπορεί να προσαρμοστεί και να χρησιμοποιηθεί στη διδασκαλία του υπολογισμού εμβαδού μιας συνάρτησης με τον άξονα x ή δύο συναρτήσεων που ορίζουν χωρίο μεταξύ τους.

Αξιολόγηση μετά την εφαρμογή:

Ως προς τις επιδιώξεις του σεναρίου:

Ο εκπαιδευτικός ελέγχει κατά πόσο επιτεύχθηκαν οι στόχοι του σεναρίου και εξετάζει του λόγους για τους οποίους κάποιοι δεν επιτεύχθηκαν ώστε να παρέμβει ανάλογα στο σενάριο.

Ως προς τα εργαλεία:

Ο εκπαιδευτικός ελέγχει την ευκολία με την οποία οι μαθητές αξιοποίησαν τα εργαλεία του προτεινόμενου λογισμικού. Αφού αξιολογήσει τα δεδομένα του επεμβαίνει ανάλογα στο σενάριο για την επόμενη εφαρμογή.

Ως προς την διαδικασία υλοποίησης:

Ο εκπαιδευτικός αξιολογεί την διαδικασία υλοποίησης του σεναρίου αξιολογώντας τα στοιχεία που δεν δούλεψαν καλά και προσαρμόζει το σενάριο.

Ως προς την προσαρμογή και επεκτασιμότητα:

Η δυνατότητα επέκτασης του σεναρίου και η ευκολία προσαρμογής σε ένα σχολικό περιβάλλον το καθιστούν σημαντικό. Ο εκπαιδευτικός πρέπει να λάβει σοβαρά υπόψη του αυτές τις παραμέτρους και να προσαρμόσει το σενάριο ανάλογα. Ιδιαίτερα όταν εφαρμόσει το σενάριο πολλές φορές και σε διαφορετικές τάξεις ή ανταλλάξει ιδέες με άλλους συναδέλφους του θα έχει δεδομένα με τα οποία θα μπορεί να κάνει ουσιαστικές προσαρμογές.

Σχεδίαση φύλλου εργασίας:

Στην ανάλυση του σεναρίου περιγράφονται οι επιμέρους δραστηριότητες με τις οποίες προτείνεται να εμπλακούν οι μαθητές καθώς και η χρονική σειρά με την οποία αυτό θα γίνει. Επομένως, η σύνταξη του φύλλου εργασίας από τον εκπαιδευτικό που θα διδάξει το σενάριο πρέπει να συμπεριλάβει τις δραστηριότητες αυτές με την ίδια ροή και τις κατάλληλες ερωτήσεις – προβλήματα προς τους μαθητές.

Απώλεια διδακτικού χρόνου:

Σε αυτήν την περίπτωση, πρέπει να δημιουργηθεί ένα σχέδιο που θα επιτρέψει την επαναφορά της απώλειας διδακτικού χρόνου. Πρώτα από όλα, πρέπει να αναλυθούν οι ανάγκες των μαθητών και να καθοριστούν

ποια θέματα είναι πιο σημαντικά. Μετά από αυτό, πρέπει να επανασχεδιαστεί το σενάριο μαθήματος και να καθοριστούν οι δραστηριότητες που θα πραγματοποιηθούν στην τάξη.

Η χρήση τεχνολογιών, όπως το διαδικτυακό μάθημα, το ηλεκτρονικό βιβλίο ή η χρήση εκπαιδευτικών εφαρμογών και εργαλείων είναι μία άλλη εναλλακτική μέθοδος .

Επίσης, παρουσιάζοντας την ύλη της ενότητας σε μια λογική ακολουθία και δίνοντας έμφαση στις βασικές έννοιες και δεξιότητες.

Τέλος, ο εκπαιδευτικός πρέπει να αναλύσει την αποτελεσματικότητα του πλάνου του και να προσαρμόσει την προσέγγισή του στο σενάριο έκτακτης συνθήκης. Συνολικά, για να αντιμετωπίσει αποτελεσματικά την απώλεια διδακτικού χρόνου, ο εκπαιδευτικός θα πρέπει να έχει ένα σχέδιο δράσης που λαμβάνει υπόψη τις ανάγκες των μαθητών του.